

“无中微子双贝塔衰变核矩阵元”研讨会  
2021年5月19日-5月23日，珠海

# 无中微子双 $\beta$ 衰变核矩阵元的 组态相互作用投影密度泛函研究

王亚坤



北京大学  
PEKING UNIVERSITY

合作者：孟杰、赵鹏巍

# 目录

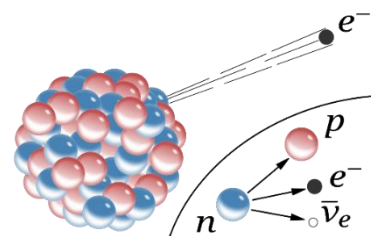
- 引言
- 理论框架
  - 无中微子双贝塔衰变跃迁算符
  - 核多体波函数
- 结果讨论
- 总结与展望

# 原子核的弱衰变过程

## □ 原子核 $\beta$ 衰变

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

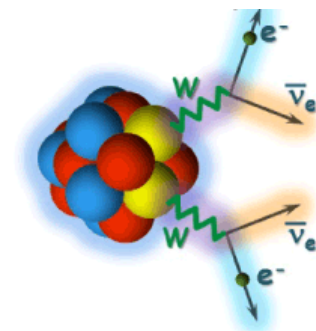
✓ 中微子的提出与发现



## □ 两中微子双 $\beta$ 衰变 - $2\nu\beta\beta$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e$$

Mayer, PR 48, 512 (1935)



## □ Majorana 费米子理论

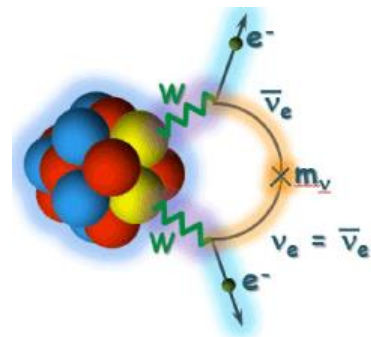
✓ 粒子是其自身的反粒子 (Majorana 粒子)

Majorana, NC 14, 171 (1937)

## □ 无中微子双 $\beta$ 衰变 - $0\nu\beta\beta$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-$$

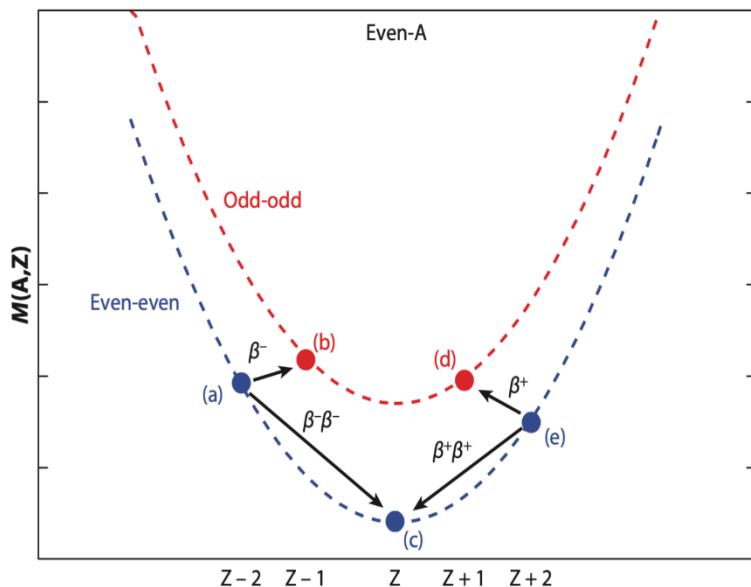
Furry, PR 56, 1184 (1939)



# 双 $\beta$ 衰变候选核素

## □ 双 $\beta$ 衰变的发生条件:

- ✓ 对关联使得偶偶原子核具有更大的结合能, 导致  $\beta$  衰变被禁戒



## □ 双 $\beta$ 衰变候选核:

- ✓ 能够发生双  $\beta$  衰变的候选核素共计 38 个; 双  $\beta$  衰变相空间因子敏感依赖于衰变 Q 值:

$$G^{2\nu} \propto Q^{11}, G^{0\nu} \propto Q^5$$

Nuclide	N.a. (%)	Q value (keV)
$^{48}\text{Ca}$	0.187	$4262.96 \pm 0.84$
$^{76}\text{Ge}$	7.44	$2039 \pm 0.050$
$^{82}\text{Se}$	8.73	$2997 \pm 0.3$
$^{96}\text{Zr}$	2.80	$3356 \pm 0.086$
$^{100}\text{Mo}$	9.63	$3034.40 \pm 0.17$
$^{110}\text{Pd}$	11.72	$2017.85 \pm 0.64$
$^{116}\text{Cd}$	7.49	$2813.50 \pm 0.13$
$^{124}\text{Sn}$	5.79	$2292.64 \pm 0.39$
$^{130}\text{Te}$	33.8	$2527.518 \pm 0.013$
$^{136}\text{Xe}$	8.9	$2457.83 \pm 0.37$
$^{150}\text{Nd}$	5.64	$3371.38 \pm 0.20$

Saakyan, ARNPS. 63, 503 (2013)

Ejiri et al., PR 797, 1 (2019)

# $0\nu\beta\beta$ 衰变的研究意义

- 轻子数不守恒
- 中微子特性 (Majorana or Dirac)
- 中微子质量排序, 绝对中微子质量

检验超出标准模型的新物理

## ➤ 太阳中微子实验:

$$m_2^2 - m_1^2 = 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$$

Ahmad et al., PRL 89, 011301 (2002)

## ➤ 大气中微子实验:

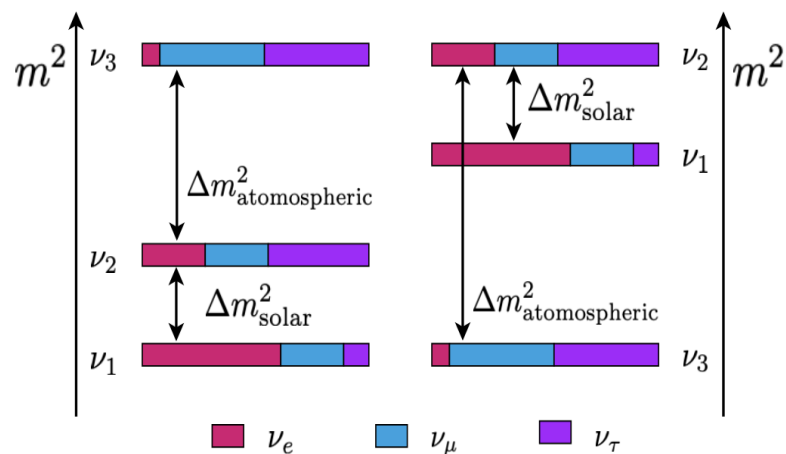
$$|m_3^2 - m_2^2| = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

Fukuda et al., PRL 81, 1562 (1998)

## ➤ $0\nu\beta\beta$ 实验:

$$\langle m_{\beta\beta} \rangle = \sum |U_{ek}|^2 m_k$$

Engel & Menendez, RPP 80, 046301 (2017)



Normal Hierarchy (NH) Inverted Hierarchy (IH)

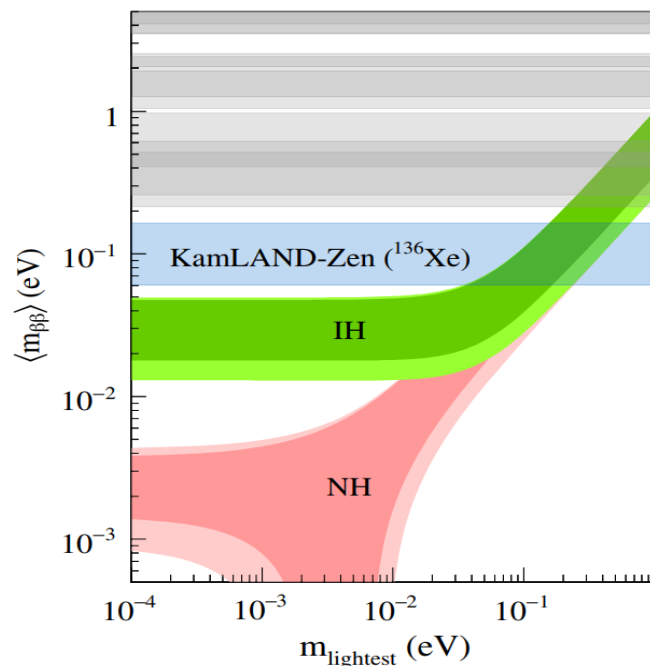
# $0\nu\beta\beta$ 实验研究进展

目前, 人们尚未观测到  $0\nu\beta\beta$  的实验信号, 只给出其半衰期的下限。

原子核	半衰期下限 (年)	实验合作组
$^{48}\text{Ca}$	$5.8 \times 10^{22}$	ELEGANT-IV
$^{76}\text{Ge}$	$1.8 \times 10^{26}$	GERDA
	$1.9 \times 10^{25}$	Majorana-Demonstrator
$^{82}\text{Se}$	$3.6 \times 10^{23}$	NEMO-3
$^{96}\text{Zr}$	$9.2 \times 10^{21}$	NEMO-3
$^{100}\text{Mo}$	$1.1 \times 10^{24}$	NEMO-3
$^{116}\text{Cd}$	$1.0 \times 10^{23}$	NEMO-3
$^{130}\text{Te}$	$1.5 \times 10^{25}$	NEMO-3
$^{136}\text{Xe}$	$1.1 \times 10^{26}$	KamLAND-Zen
	$1.8 \times 10^{25}$	EXO-200
$^{150}\text{Nd}$	$2.0 \times 10^{22}$	NEMO-3

实验名称	主导单位	候选核素
CDEX	清华大学	$^{76}\text{Ge}$
Pandax-III	上海交通大学	$^{136}\text{Xe}$
$N\nu\text{DEx}$	中科院近物所	$^{82}\text{Se}$
晶体微量热实验	复旦大学	$^{100}\text{Mo}$

升级后的 nEXO ( $^{136}\text{Xe}$ ), LEGEND ( $^{76}\text{Ge}$ ), KamLAND-Zen ( $^{136}\text{Xe}$ ) 等实验预计将  $0\nu\beta\beta$  半衰期推至  $10^{27}$  年。



$$\langle m_{\beta\beta} \rangle = \sum_k |U_{ek}|^2 m_k$$

# $0\nu\beta\beta$ 理论研究进展: 核矩阵元

- $0\nu\beta\beta$  半衰期 (轻中微子质量机制):

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu}(Q_{\beta\beta}, Z) |M^{0\nu}|^2 \langle m_{\beta\beta} \rangle^2$$

- 相空间因子  $G^{0\nu}(Q_{\beta\beta}, Z)$  可通过运动学精确计算得到.

Kotila & Iachello, PRC 85, 034316 (2012)

- 原子核矩阵元  $M^{0\nu}$  依赖于跃迁算符以及原子核结构模型提供的原子核多体波函数.

- 中微子有效质量  $\langle m_{\beta\beta} \rangle = \sum_k |U_{ek}|^2 m_k$  依赖于中微子振荡矩阵以及中微子质量本征值.

原子核矩阵元的高精度计算是连接  $0\nu\beta\beta$  衰变实验数据与中微子有效质量的关键因素

# $0\nu\beta\beta$ 理论研究进展: 核矩阵元

## □ 组态相互作用壳模型 (CISM)

Horoi et al., PRL 110, 222502 (2013)

Iwata et al., PRL 116, 112502 (2016)

## □ 相互作用玻色子模型 (IBM)

Barea et al., PRC 87, 014315 (2015)

## □ 准粒子无规相近似 (QRPA)

Simkovic et al., PRC 87, 045501 (2013)

Fang et al., PRC 92, 044301 (2015)

## □ 投影 HFB 模型 (PHFB)

Rath et al., PRC 85, 014308 (2012)

Rath et al., PRC 87, 014301 (2013)

## □ 密度泛函理论 (DFT)

Vaquero et al., PRL 111, 142501 (2013)

Song et al., PRC 90, 054309 (2014)

Yao et al., PRC 91, 024316 (2015)

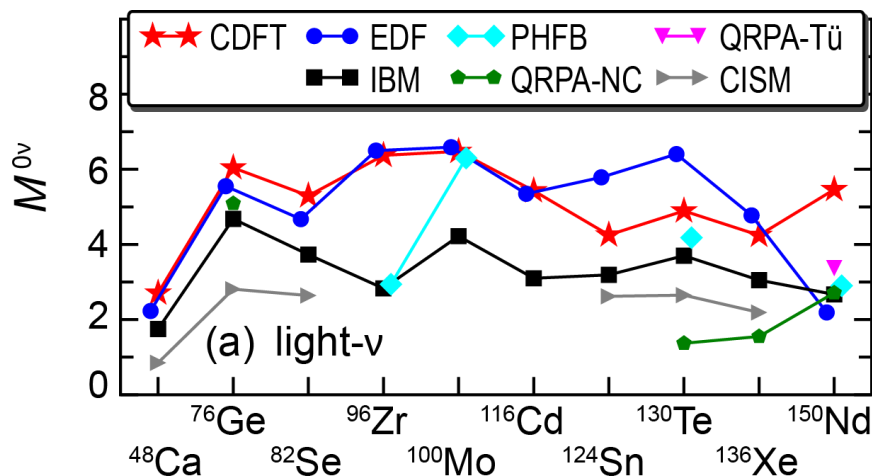
## □ 基于壳模型哈密顿的生成坐标方法

Jiao et al., PRC 96, 054301 (2017)

Jiao et al., PRC 98, 064324 (2018)

## □ 手征有效场论+介质内相似重整化群+生成坐标方法

Yao et al., PRL 124, 232501 (2020)

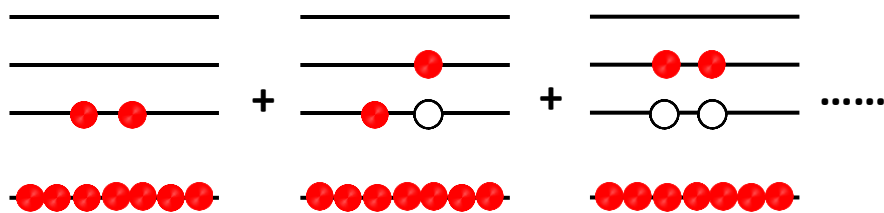


减小  $M^{0\nu}$  差异  $\Rightarrow$  更大的模型空间, 更多的物理关联



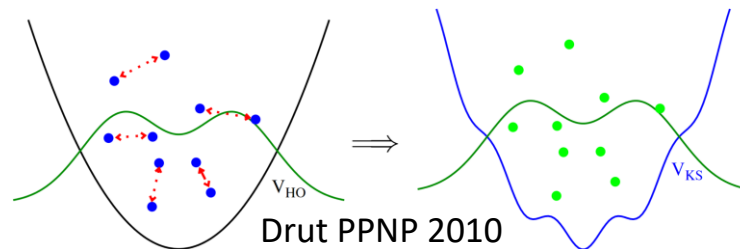
# 组态相互作用投影密度泛函理论

## 组态相互作用壳模型:



$$\hat{H}|\Psi_i\rangle = E_i|\Psi_i\rangle \Rightarrow \hat{H}_{\text{eff}}|\Phi_i\rangle = E_i|\Phi_i\rangle$$

## 密度泛函理论:



$$E[\rho] \Rightarrow \hat{h} = \frac{\partial E[\rho]}{\partial \rho}, \hat{h}\phi_i = \varepsilon_i\phi_i \Rightarrow \rho = \sum_i |\phi_i|^2$$

普适有效相互作用    重核研究    谱学性质    对称性破缺    组态混合

壳模型

✗

✗

✓

✗

✓

密度泛函理论

✓

✓

✗

✓

✗

## 组态相互作用投影密度泛函理论(CI-PDFT) Zhao et al., PRC 94, 041301(R) (2016)

自治密度  
泛函计算



内禀组态  
空间 $|\Phi_\kappa\rangle$



转动对称性恢  
复  $\hat{P}_{MK}^I|\Phi_\kappa\rangle$



哈密顿量对  
角化

✓ 全模型空间    ✓ 集体与准粒子激发之间的混合    ✗ 三轴形变自由度

# 本文工作

- 发展三维组态相互作用投影密度泛函理论, 研究原子核  $0\nu\beta\beta$  核矩阵元:
  - ✓ 三轴形变  $\Rightarrow$  核矩阵元中的三轴形变效应
  - ✓ 准粒子激发组态  $\Rightarrow$  核矩阵元中的准粒子组态混合效应

# 弱作用散射矩阵

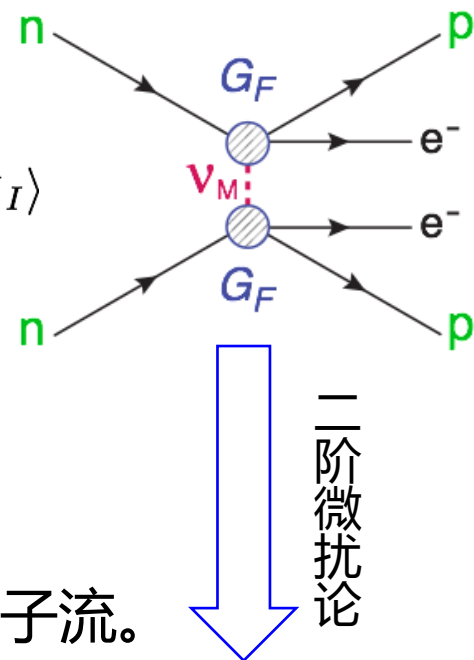
弱作用过程散射矩阵:

$$\langle f|iT|i\rangle = \langle p_1, p_2; \Psi_F \left| \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \hat{T}(\mathcal{H}_\beta(x_1)\mathcal{H}_\beta(x_2)) \right| \Psi_I \rangle$$

弱相互作用哈密顿量:

$$\mathcal{H}_\beta(x) = \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} j_L^\mu \mathcal{J}_\mu^\dagger + \text{h.c.}$$

其中,  $j_L^\mu = 2(\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL})$  为左手轻子流,  $\mathcal{J}_\mu^\dagger$  为核子流。



末态电子波函数

中微子传播子

$$\langle f|iT|i\rangle = 4 \left( \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{(-i)^2}{2!} N_{p_1} N_{p_2} \int \bar{u}(p_1) e^{ip_1 x_1} \gamma^\mu \langle 0|\hat{T}(\nu_{eL}(x_1)\nu_{eL}^T(x_2))|0\rangle$$

$$\times \gamma^{\nu T} \bar{u}^T(p_2) e^{ip_2 x_2} \langle \Psi_F|\hat{T}(\mathcal{J}_\mu^\dagger(x_1)\mathcal{J}_\nu^\dagger(x_2))|\Psi_I\rangle d^4x_1 d^4x_2 - (p_1 \leftrightarrow p_2)$$

强相互作用部分

$$N_{p_{1,2}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_{1,2}^0}}$$

注意: 这里忽略了原子核库伦场对末态电子波函数的影响。

# 核子流

- 核子流包含矢量流 (V), 弱磁流 (M), 轴矢量流 (A), 诱发赝标流 (P) :

$$\mathcal{J}_\mu^\dagger(x) = \bar{\psi}(x) \left[ g_V(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu + i g_M(\mathbf{q}^2) \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2m_p} q^\nu - g_A(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu \gamma_5 - g_P(\mathbf{q}^2) q_\mu \gamma_5 \right] \tau_- \psi(x)$$

Simkovic et al., PRC 60, 055502 (1999)

其中,  $m_p$  为核子质量,  $q_\mu$  为四动量转移,  $\psi(x)$  为核子场,  $\tau_-$  为同位旋下降算符。

- 含偶极形状因子的耦合系数:

$$g_V(\mathbf{q}^2) = \frac{g_V}{(1 + \mathbf{q}^2/M_V^2)^2}$$

$$g_A(\mathbf{q}^2) = \frac{g_A}{(1 + \mathbf{q}^2/M_A^2)^2}$$

$$g_M(\mathbf{q}^2) = (\mu_p - \mu_n) g_V(\mathbf{q}^2) \quad g_P(\mathbf{q}^2) = 2m_p \frac{g_A(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \left( 1 - \frac{m_\pi^2}{M_A^2} \right)$$

Simkovic et al., PRC 60, 055502 (1999)

耦合常数

$$g_V = 1$$

$$g_A = 1.254$$

截断常数

$$M_V = 842 \text{ MeV}$$

$$M_A = 1090 \text{ MeV}$$

质子中子磁矩差值

$$(\mu_p - \mu_n) = 3.70$$

# 中微子传播子

- 中微子传播子:

$$\langle 0 | \hat{T} (\nu_{eL}(x_1) \nu_{eL}^T(x_2)) | 0 \rangle$$

- Majorana 中微子场:

$$\nu_{eL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{ei} \nu_{iL}(x)$$

$$\nu_{iL}(x) = \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_i(x)$$

$$\nu_i = (\nu_i)^c \quad \text{Majorana 条件}$$

- 轻中微子极限下的 Majorana 传播子:

$$\langle 0 | \hat{T} (\nu_{eL}(x_1) \nu_{eL}^T(x_2)) | 0 \rangle = - \sum_i |U_{ei}|^2 \frac{1 - \gamma_5}{2} \langle 0 | \hat{T} (\nu_i(x_1) \bar{\nu}_i(x_2)) | 0 \rangle \frac{1 - \gamma_5}{2} C$$

$$\langle 0 | T (\nu_i(x_1) \bar{\nu}_i(x_2)) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int e^{-iq(x_1-x_2)} \frac{m_i}{q^2 - m_i^2} d^4q$$

$$\frac{m_i}{q^2 - m_i^2} \xrightarrow[m_i \ll 1 \text{ keV}]{q \sim 100 \text{ MeV}} \frac{m_i}{q^2} \xrightarrow{\text{有效中微子质量}} \langle m_\nu \rangle \equiv \sum_i |U_{ei}|^2 m_i$$

# $0\nu\beta\beta$ 衰变算符

□  $0\nu\beta\beta$  衰变率:

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = \frac{1}{\ln 2} \int |\langle f | iT | i \rangle|^2 d\Pi_2 = G^{0\nu} g_A^4 \left| \frac{\langle m_\nu \rangle}{m_e} \right|^2 |M^{0\nu}|^2$$

其中,  $G^{0\nu}$  为相空间因子,  $M^{0\nu}$  为核矩阵元.

□ 核矩阵元:

$$M^{0\nu} = \langle \Psi_F | \hat{O}^{0\nu} | \Psi_I \rangle$$

□  $0\nu\beta\beta$  衰变算符:

$$\hat{O}^{0\nu} = \frac{4\pi R}{g_A^2} \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \boxed{h(q)} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \boxed{\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)}$$

$$h(q) = 1/[q(q + E_d)] \leftarrow \text{中微子势}$$

↓  
两核子流

# $0\nu\beta\beta$ 衰变算符

□  $0\nu\beta\beta$  衰变算符:

$$\hat{O}^{0\nu} = \frac{4\pi R}{g_A^2} \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} h(q) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)$$

核子流:  $\mathcal{J}_\mu^\dagger(x) = \bar{\psi}(x) \left[ g_V(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu + i g_M(\mathbf{q}^2) \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_p} - g_A(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu \gamma_5 - g_P(\mathbf{q}^2) q_\mu \gamma_5 \right] \tau_- \psi(x)$

□ 算符的分解:

$$\text{VV: } g_V^2(\mathbf{q}^2) (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(1)} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(2)},$$

$$\text{AA: } g_A^2(\mathbf{q}^2) (\gamma^0 \gamma_\mu \gamma_5)^{(1)} (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5)^{(2)},$$

$$\text{AP: } 2g_A(\mathbf{q}^2) g_P(\mathbf{q}^2) (\gamma^0 \gamma \gamma_5)^{(1)} (\gamma^0 \mathbf{q} \gamma_5)^{(2)},$$

$$\text{PP: } g_P^2(\mathbf{q}^2) (\gamma^0 \mathbf{q} \gamma_5)^{(1)} (\gamma^0 \mathbf{q} \gamma_5)^{(2)},$$

$$\text{MM: } g_M^2(\mathbf{q}^2) \left( \gamma^0 \frac{\sigma_{\mu i} q^i}{2m_p} \right)^{(1)} \left( \gamma^0 \frac{\sigma^{\mu j} q_j}{2m_p} \right)^{(2)},$$

□  $0\nu\beta\beta$  核矩阵元:  $M^{0\nu} = M^{VV} + M^{AA} + M^{AP} + M^{PP} + M^{MM}$

# CI-PDFT多体波函数

- CI-PDFT 框架下的核多体波函数:

$$|\Psi_{IM}\rangle = \sum_{K\kappa} F_{K\kappa}^I \hat{P}_{MK}^I |\Phi_\kappa\rangle$$

- 三维角动量投影算符  $\hat{P}_{MK}^I$ :

$$\hat{P}_{MK}^I = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) \hat{R}(\Omega)$$

- 内禀波函数  $|\Phi_\kappa\rangle \in \{|\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\nu_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_j}^\dagger |\Phi_0\rangle\}$

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{k>0} \hat{\beta}_k |0\rangle, \quad \begin{pmatrix} h_D - \lambda & \Delta \\ -\Delta^* & -h_D^* + \lambda \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix}$$

- 变分参数  $F_{K\kappa}^I$  求解:

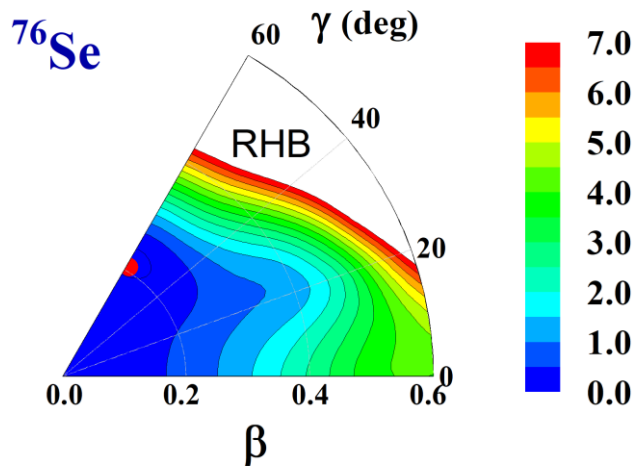
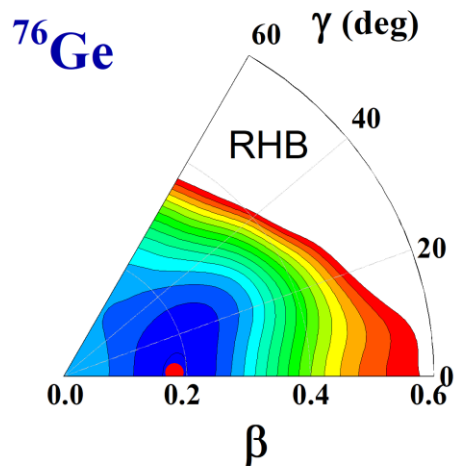
$$\sum_{K'\kappa'} \{ \langle \Phi_\kappa | \hat{H} \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{\kappa'} \rangle - E^I \langle \Phi_\kappa | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{\kappa'} \rangle \} F_{K'\kappa'}^I = 0$$

$\hat{H}$  通过密度泛函对密度矩阵  $\hat{\rho}_{ji}$  的二阶偏导求得, 无任何可调参数

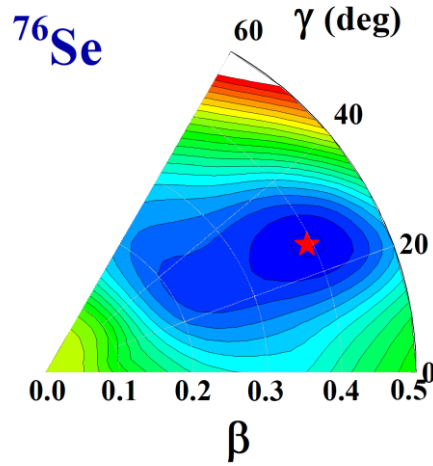
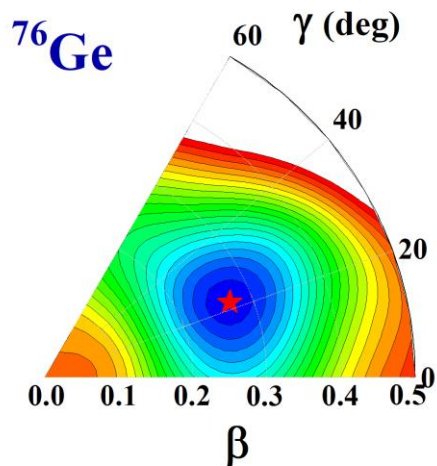


# 位能曲面

□  $^{76}\text{Ge}$  和  $^{76}\text{Se}$  位能曲面:



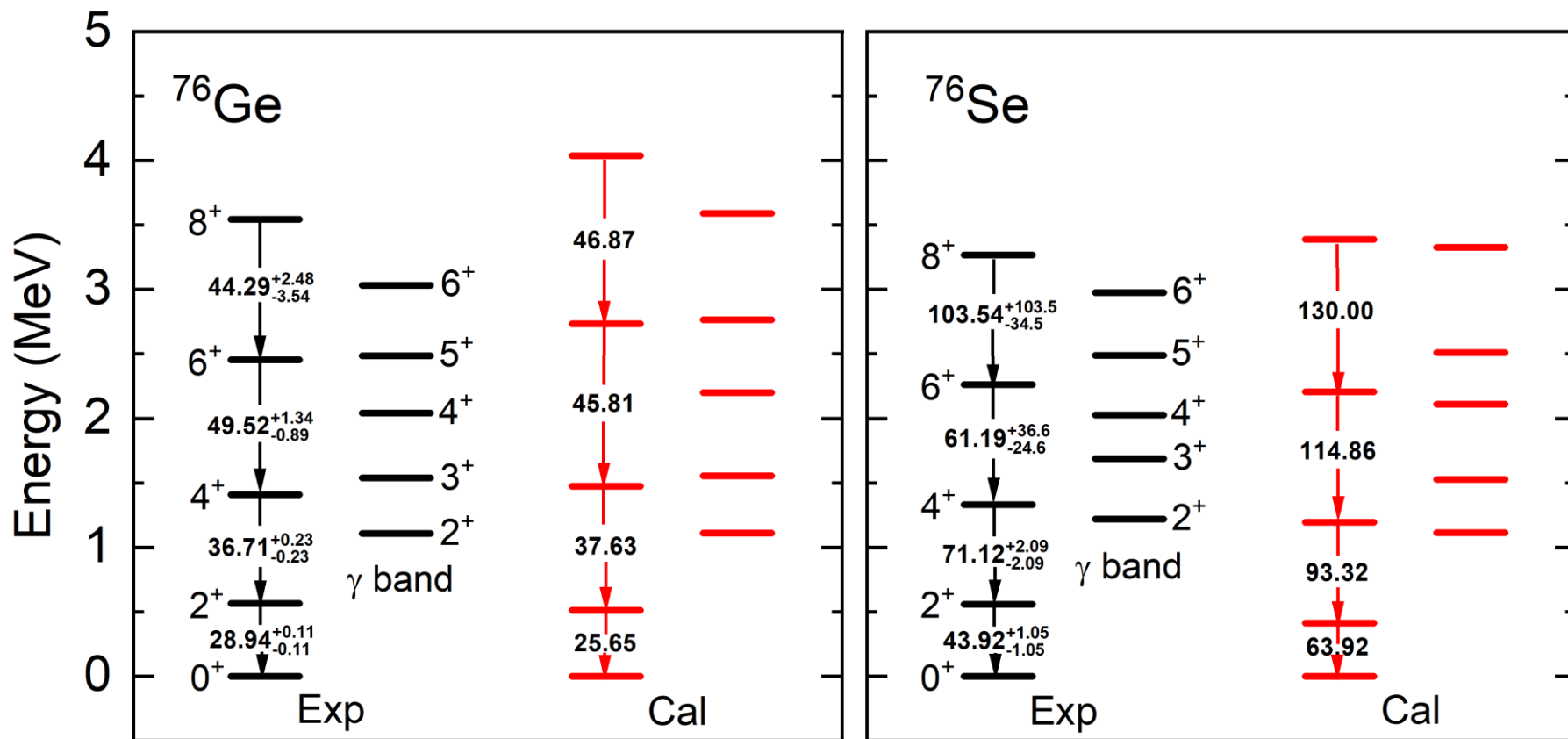
密度泛函计算



组态相互作用  
投影密度泛函计算

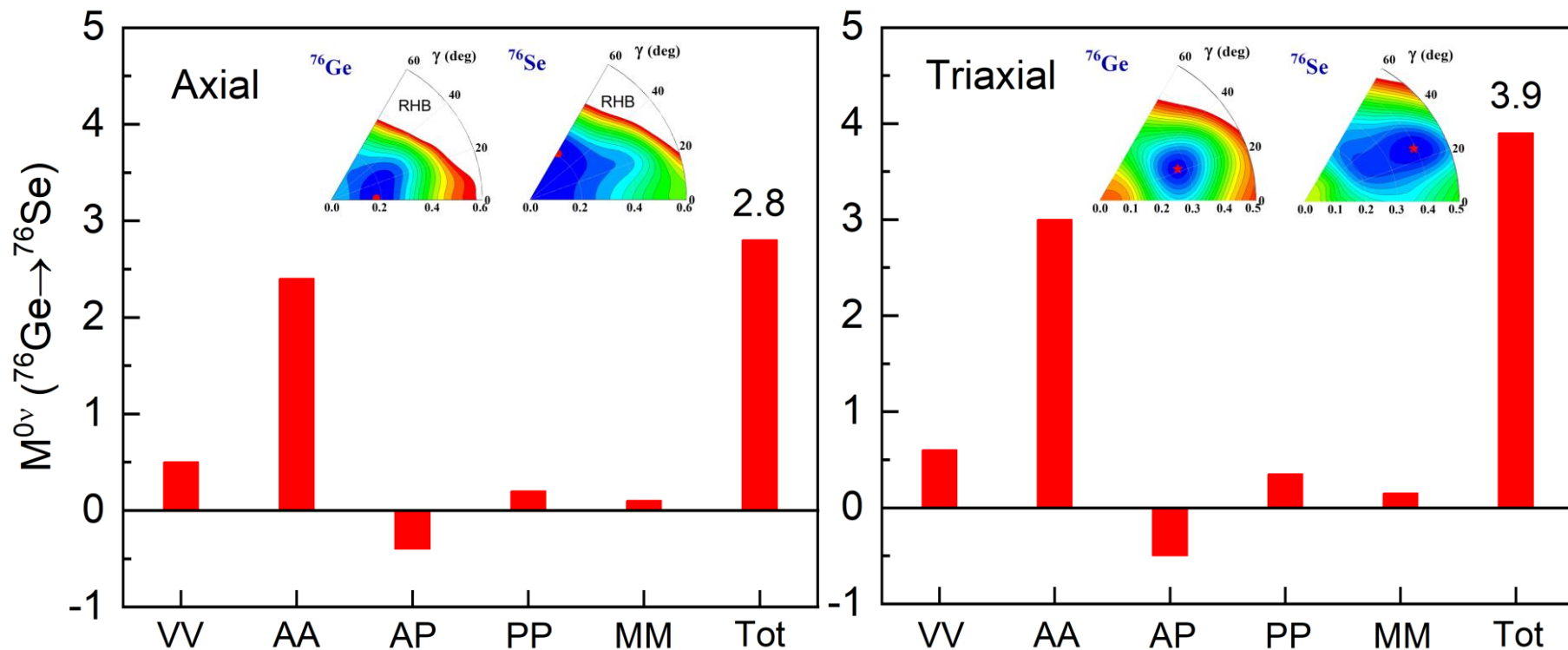
✓  $^{76}\text{Ge}$ :  $\gamma = 22^\circ$ ;  $^{76}\text{Se}$ :  $\gamma = 26^\circ$

# 能谱和跃迁



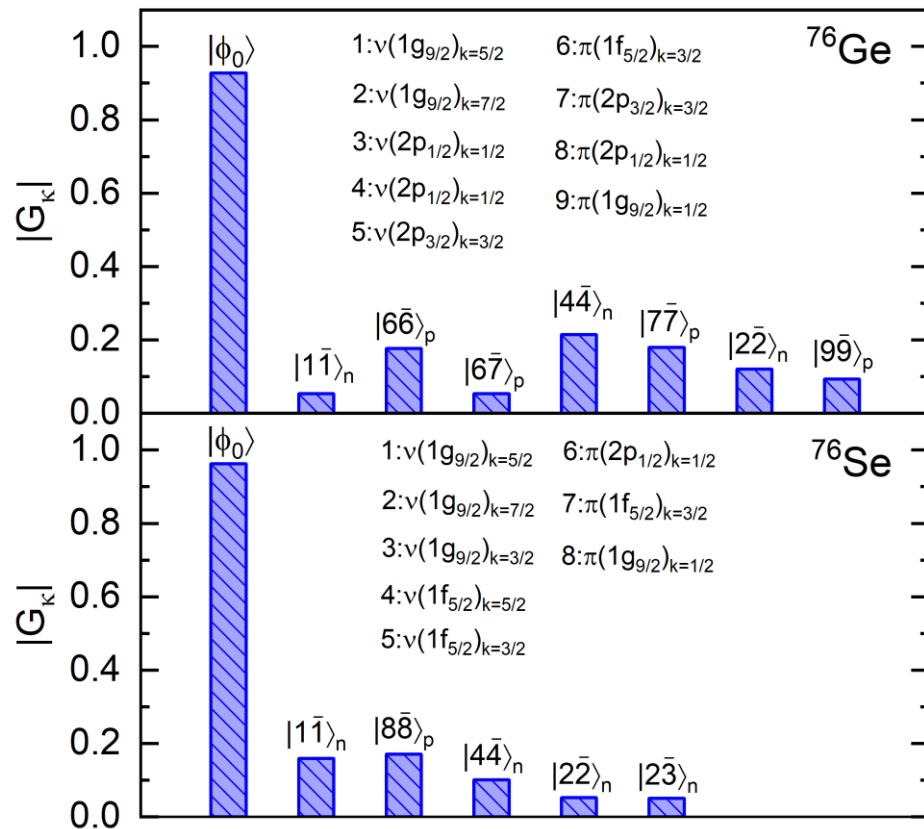
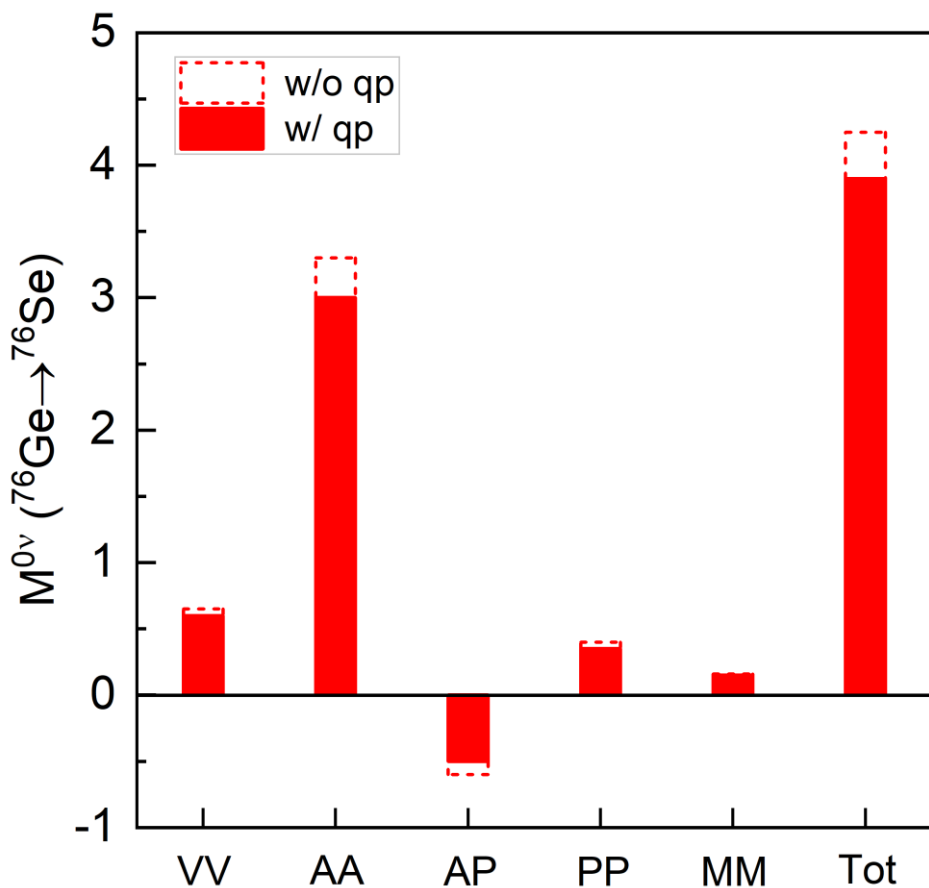
- ✓ 理论计算结果较好地再现原子核  $^{76}\text{Ge}$  和  $^{76}\text{Se}$  晕态和  $\gamma$  带的谱学性质
- ✓ 完整考虑了矢量、同位旋矢量、梯度项和高阶项中奇时间场分量的贡献

# 核矩阵元：三轴形变效应



- ✓ 轴矢耦合道贡献的核矩阵元值约占总核矩阵元值的 85%，赝标和弱磁耦合项的贡献约为10%
- ✓ 考虑三轴形变自由度，核矩阵元值从 2.8 增加到 3.9，增幅约 39%

# 核矩阵元：准粒子组态混合效应



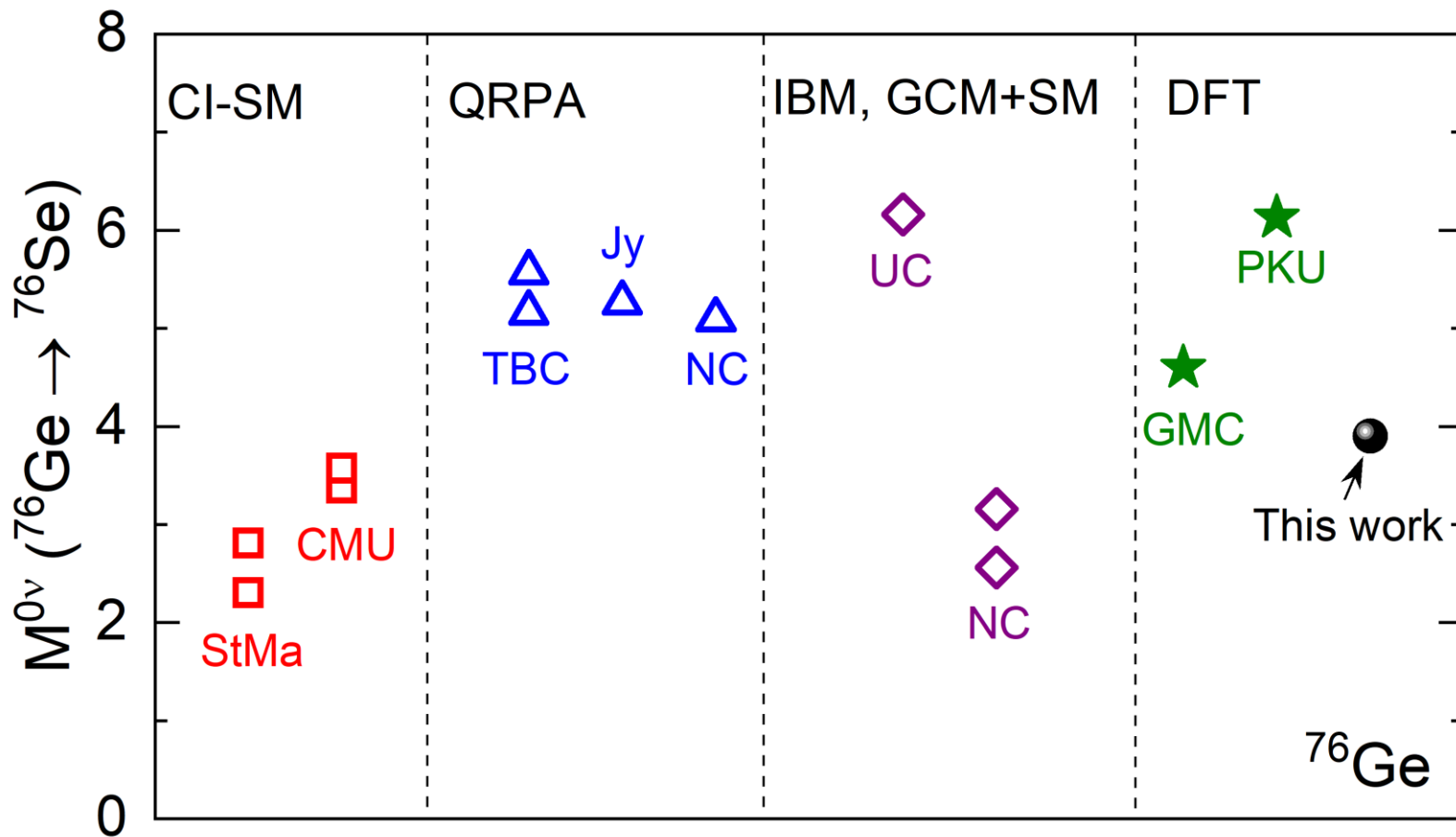
原子核	核矩阵元	
	考虑组态混合	不考虑组态混合
<sup>76</sup> Ge	3.90	4.25

✓ 考虑准粒子组态混合，核矩阵元  
值从 4.25 降低至 3.90

# 总结

- 发展了三维组态相互作用投影密度泛函理论，以双贝塔衰变候选核  $^{76}\text{Ge}$  为例，计算了其谱学性质和核矩阵元值，分析了原子核三轴形变和准粒子组态混合对核矩阵元的影响，研究发现：
  - ✓ 考虑三轴形变自由度， $^{76}\text{Ge}$  的核矩阵元值增加，增幅为 39%
  - ✓ 准粒子激发组态混合会降低核矩阵元值，减低的幅度为 8.9%

# 展望



□ 多体波函数：三轴形状涨落、同位旋标量对关联...

□ 跃迁算符：两体流、轴矢耦合常数  $g_A$  压低、contact 相互作用...